

UNIVERSITI SAINS MALAYSIA

Peperiksaan Semester Kedua
Sidang Akademik 1996/97

April 1997

ZCT 310/4 - Kaedah Matematik III

Masa: [3 jam]

Sila pastikan bahawa kertas peperiksaan ini mengandungi TIGA muka surat yang bercetak sebelum anda memulakan peperiksaan ini.

Jawab kesemua LIMA soalan. Kesemuanya wajib dijawab dalam Bahasa Malaysia.

1. Suatu fungsi gigi-gergaji (sawtooth) dalam julat $0 \leq x \leq 1$ dapat diungkapkan sebagai

$$f(x) = \begin{cases} ax, & \text{untuk } 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ a(x - \frac{1}{2}), & \text{untuk } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

- (a) Carilah perluasan ungkapan fungsi ini dalam julat $-1 \leq x \leq 0$, kemudian lakarkan kedua-duanya.

(5/100)

- (b) Tunjukkan bahawa sudut fasa ungkapan siri Fourier bagi fungsi gigi-gergaji di atas adalah $2n\pi x$ dan bukannya $n\pi x$, dengan n merupakan nombor bulat positif yang berjalan.

(5/100)

- (c) Selanjutnya carilah ungkapan lengkap siri Fourier fungsi yang berkenaan.

(10/100)

2. Persamaan pembezaan Legendre diberikan oleh

$$(1-x^2) \frac{d^2y}{dx^2} - 2x \frac{dy}{dx} + \ell(\ell+1)y = 0$$

dengan ℓ menyatakan nombor bulat positif yang berjalan.

- (a) Kalau diadakan transformasi peubah (variable) $z = (1-x)/2$, maka carilah ungkapan persamaan pembezaan yang baharu dinyatakan dalam z

(5/100)

...2/-

- (b) Dengan memperhatikan bentuk persamaan pembezaan yang baharu, maka sebutkanlah nama persamaan pembezaan yang berkenaan. Selanjutnya tandai nilai parameter-parameter persamaan ini, lalu tuliskan ungkapan penyelesaiannya. (5/100)

- (c) Sebaliknya dengan penyelesaian (b), penyelesaian persamaan pembezaan Legendre dalam julat $0 \leq |x| < 1$ diberikan oleh polinomial Legendre .

$$P_\ell(x) = \sum_{r=0}^{\infty} (-1)^r \frac{(2\ell-2r)!}{2^\ell r!(\ell-r)!(\ell-2r)!} x^{\ell-2r}$$

Buktikan dengan cara memasukan langsung ke dalam persamaan pembezaan Legendre bahawa ia betul-betul memenuhi sebagai penyelesaian. Jelaskan mengapa penyelesaian ini bersifat sebagai polinomial. (10/100)

3. Diberikan persamaan pembezaan

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + \frac{1}{4}(e^{-x} - \alpha)y = 0$$

dengan α merupakan parameter yang belum ditetapkan nilainya.

- (a) Carilah ungkapan akhir persamaan pembezaan di bawah transformasi berturut-turut $y = s/x$ dan $z = e^{-x/2}$ (8/100)
- (b) Tetapkan nilai parameter α agar persamaan pembezaan bagi S boleh ditandai sebagai persamaan pembezaan yang dikenali bentuk piawainya dan sebutkan nama persamaan pembezaan yang berkenaan. (5/100)
- (c) Diantara penyelesaian-penyelesaian bagi S , pilihlah penyelesaian yang memenuhi syarat terhad dalam julat $0 \leq x \leq \infty$. (7/100)

4. Persamaan Helmholtz homogen dimensi-dua suatu persamaan gelombang yang tak mempunyai unit dimensi boleh dituliskan sebagai

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{1}{4}H = 0$$

Jika sepanjang paksi y, H tak memperlihatkan sifat sebagai fungsi yang berosilasi, maka:

- (a) Carilah ungkapan penyelesaian $H = H(x,y)$, bila ia memenuhi syarat sempadan: $H = 0$ pada $x = y = 0$ dan $\partial H / \partial x = 0$ pada $x = \pi$, dengan amplitud bagi H dibiarkan sembarangan.

(15/100)

- (b) Carilah ungkapan fungsi gelombang yang berkenaan, jika dipenuhi syarat awal $\psi(x,y,0) = 0$ dan dengan halaju penjalaran (propagation) adalah v.

(5/100)

5. Tinjaulah suatu cecair likat yang mengalir melalui suatu saluran berkerat-rentas persegi-empat yang dalamnya h, dan menerima pemanasan secara homogen pada permukaannya di titik asal. Ini bermakna sistem dipandang mengalami konduksi dan konveksi haba secara pegun dengan persamaan yang berkenaan diberikan oleh

$$v_x \frac{\partial u}{\partial x} = D \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad v_x = A(h^2 - z^2)$$

di mana u menyatakan suhu, D adalah pekali difusi haba dan A adalah suatu faktor pembanding yang tak perlu dirinci maknanya

- (a) Tunjukkanlah bahawa $u(x,z) = T_0 e^{-kx} e^{-z^2/d^2}$ memenuhi sebagai penyelesaian bila $d = h\sqrt{2}$, sedangkan T_0 adalah menyatakan suhu pada $x = z = 0$.

(10/100)

- (b) Tetapkan nilai parameter k dinyatakan dalam A, D dan h sedemikian memenuhi persyaratannya (a).

(10/100)

- oooOooo -